Basisprüfung lineare Algebra - Sommer 2020 Michael Baumgartner

1. a)

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad \rightarrow \text{Paarweise orthogonal}$$

b) Lin. unabh. da paarweise orthogonal.

Man könnte auch gaussen.

c) Spalten normieren:

Praktisch identische Aufgabe zur Herbst 2019 Prüfung

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \end{bmatrix}$$

$$A = Q \cdot R = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix}}}$$

5) Intuitiv direkt klar, da Bild(A) eine Linearkomb. der Spaltenvektoren von A ist und Bild(B) dasselbe von B. Also bedeutet

$$\text{Bild}(A) \perp \text{Bild}(B) \iff \text{Spalten}(A) \perp \text{Spalten}(B)$$

und $A^H B$ berechnet die Skalarprodukte der Spalten von A & B, welche folglich alle $= 0$ sind $\iff A^H B = \underline{\underline{0}}$

Rigoroser, z.B. mit Pseudocode oder Induktion

$\Rightarrow$:

```
for i in range(0,n):
  for j in range(0,n):
    wähle x = Nullvektor mit 1 an i-ter Stelle
    wähle y = Nullvektor mit 1 an j-ter Stelle
```

$Ax = b_i \in \text{Bild}(A)$ & i-ter Spaltenvektor von A

$By = b_j' \in \text{Bild}(B)$ & j-ter Spaltenvektor von B

Da $\text{Bild}(A) \perp \text{Bild}(B) \Rightarrow b_i \perp b_j' \quad \forall i,j \in (1,n)$

$\Rightarrow$ Spalten von A sind paarweise $\perp$ Spalten von B

$$A^H B = \begin{bmatrix} b_1^H b_1' & b_1^H b_2' & \cdots & b_1^H b_n' \\ b_2^H b_1' & b_2^H b_2' & & \\ \vdots & & \cdots & \\ b_n^H b_1' & & & b_n^H b_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftarrow$: $A^H B = 0 \Rightarrow$ Spalten von A sind paarweise $\perp$ auf Spalten von B

$$\text{Bild}(A) = \{ b \mid Ax = b,\ x \in \mathbb{C}^n \}$$
$$= \{ b \mid x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b,\ x \in \mathbb{C}^n \}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ Spaltenvektoren von A

$$\text{Bild}(B) = \{ b' \mid x_1' a_1' + x_2' a_2' + \dots + x_n' a_n' = b',\ x' \in \mathbb{C} \}$$

$a_1', a_2', \dots, a_n'$ Spaltenvektoren von B

$$b^H b'^H = x_1 x_1' \overbrace{a_1^H a_1'}^{0} + n \cdot x_1 x_2' \overbrace{a_1^H a_2'}^{0} + n \cdot x_2 x_1' \overbrace{a_2^H a_1'}^{0}$$
$$+ \dots + x_n x_n' \underbrace{a_n^H a_n'}_{0} = 0 \quad \underline{\underline{\forall x, x' \in \mathbb{C}}}$$

$\Rightarrow$ $\text{Bild}(A) \perp \text{Bild}(B)$ $\square$